

機械・航空宇宙工学科

---

**制御工学第2及び演習  
(旧 制御工学第2)  
第3回：状態方程式の解**

---

航空宇宙工学専攻

椿野 大輔

(tsubakino [at] nuae.nagoya-u.ac.jp)

[at] → @ へ

# 行列の指数関数

## □ 冪級数による定義

- 行列  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  に対して以下のような級数を考えてみる.

$$I_n + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots$$

- 実は  $\uparrow$   $n \times n$  単位行列

- どのような  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  に対して収束.
- さらに  $t$  に関して, 任意の有界閉集合上で一様に収束.

## □ 行列の指数関数 ( $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , $t \in \mathbb{R}$ )

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = I_n + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots$$

$$\begin{matrix} n \\ \{ \\ \blacksquare \\ \} \\ \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{matrix}$$

$$A^0 = I_n$$

$$n \left\{ \underbrace{\blacksquare}_n + \blacksquare + \blacksquare + \blacksquare + \dots \right.$$



# 証明 (ii)

## □ (ii) 直接計算する

$$e^{At_1} e^{At_2}$$

$$= \left( I_n + t_1 A + \frac{t_1^2}{2!} A^2 + \frac{t_1^3}{3!} A^3 + \dots \right) \left( I_n + t_2 A + \frac{t_2^2}{2!} A^2 + \frac{t_2^3}{3!} A^3 + \dots \right)$$

$$= I_n + t_2 A + \frac{t_2^2}{2!} A^2 + \frac{t_2^3}{3!} A^3 + \frac{t_2^4}{4!} A^4 + \dots \quad \leftarrow I_n \times e^{At_2}$$
$$+ t_1 A + t_1 t_2 A^2 + \frac{t_1 t_2^2}{2!} A^3 + \frac{t_1 t_2^3}{3!} A^4 + \dots \quad \leftarrow t_1 A \times e^{At_2}$$
$$+ \frac{t_1^2}{2!} A^2 + \frac{t_1^2 t_2}{2!} A^3 + \frac{t_1^2 t_2^2}{(2!)^2} A^4 + \dots \quad \leftarrow \frac{t_1^2}{2!} A^2 \times e^{At_2}$$
$$+ \frac{t_1^3}{3!} A^3 + \frac{t_1^3 t_2}{3!} A^4 + \dots \quad \leftarrow \frac{t_1^3}{3!} A^3 \times e^{At_2}$$

$$(t_1 + t_2)A \quad \frac{(t_1 + t_2)^2}{2!} A^2 \quad \frac{(t_1 + t_2)^3}{3!} A^3 \quad \dots$$