機械・航空宇宙工学科

制御工学第2及び演習
（旧 制御工学第２）
第４回：システムの可制御性

航空宇宙工学専攻

椿野 大輔

(tsubakino [at] nuae.nagoya-u.ac.jp)

[at] → ＠ へ

行列の像（image）と列ベクトルの関係（3）

行列の像と列ベクトルの一般論

- 行列 $M = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ に対して

$$\mathrm{Im}\, M = \mathrm{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$$

- $\mathbb{R}^n$ と一致するには？
  - 線形和を考えるベクトル $v_1, v_2, \ldots, v_m$ に1次独立なベクトルが n 個含まれていることが必要かつ十分

- 行列の列ベクトルのなかで1次独立なベクトルの個数

  =: 行列のランク（階数, rank）

$\therefore M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ に対して

$$\boxed{\mathrm{Im}\, M = \mathbb{R}^n \iff \mathrm{rank}\, M = n}$$

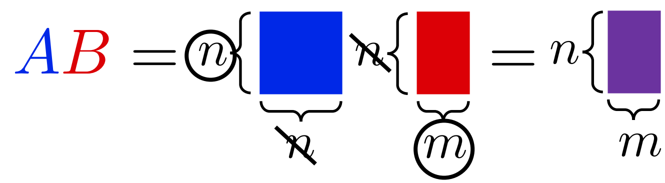
可制御であるための必要十分条件

[定理]

- 状態方程式

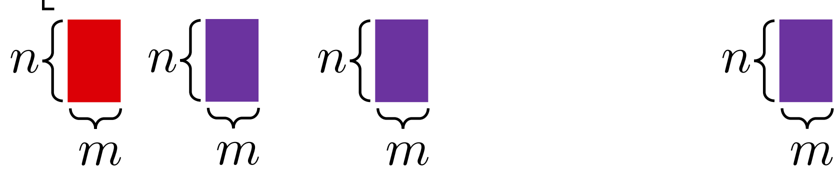
$$(*) \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m$$



- 可制御性行列

$$M_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times nm}$$



一般に横長

- 状態方程式（∗）で表されるシステムが可制御であるための必要十分条件は

$$\boxed{\mathrm{rank}\, M_C = n}$$

← 状態変数の数

となることである. *Kalman('s) rank condition*

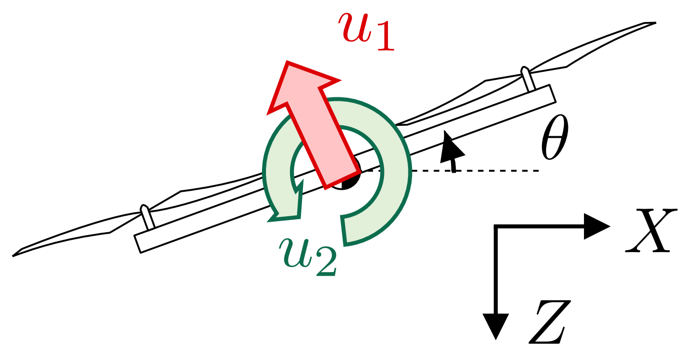
例：マルチロータ機の平面運動

非線形モデル

- 状態方程式

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -u_1 \sin x_5 \\ x_4 \\ -u_1 \cos x_5 + g \\ x_6 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = X,\quad x_2 = \dot{X},\quad x_3 = Z,\quad x_4 = \dot{Z},\quad x_5 = \theta,\quad x_6 = \dot{\theta}$$



- 平衡点の一つ

$$x_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad u_s = \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}$$

線形近似

$$\dot{\xi} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \xi + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B} v$$