機械・航空宇宙工学科

制御工学第2及び演習
（旧 制御工学第２）
第６回：双対性・同値変換

航空宇宙工学専攻

椿野 大輔

(tsubakino [at] nuae.nagoya-u.ac.jp)

[at] → @ へ

可制御性と可観測性の双対性

■ システムと双対システム

<u>元のシステム</u>

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

<u>双対 (dual) システム</u>

$$\Sigma' : \begin{cases} \dot{x} = A^\top x + C^\top u \\ y = B^\top x \end{cases}$$

Σ が可制御 $\Longleftrightarrow$ Σ' が可観測

Σ が可観測 $\Longleftrightarrow$ Σ' が可制御

可制御性と可観測性の**双対性** (duality)

- (A, B) について可制御性から導かれる結果（具体的には今後扱う）には (A, C) に対しても対応する結果が存在.

状態変数の変換の一般論

状態方程式

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m$$

$$y = Cx \qquad y(t) \in \mathbb{R}^r$$

状態変数の変換

- 新たな変数

$$\bar{x} = Tx \qquad T \in \mathbb{R}^{n\times n}$$ ：正則な行列

- 逆変換

$$x = T^{-1}\bar{x}$$

- 変換後の状態方程式と出力方程式

代入

$$\dot{\bar{x}} = T\dot{x} = TAx + TBu = \boxed{TAT^{-1}}\bar{x} + \boxed{TB}u$$

微分

$$y = Cx = \boxed{CT^{-1}}\bar{x}$$

同値変換での可制御性・可観測性の不変性

[定理]

- 行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$ および
行列 $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\bar{C} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ は，ある正則な
$T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ により互いに同値であるとする.

$$\bar{A} = TAT^{-1},\ \bar{B} = TB,\ \bar{C} = CT^{-1}$$

- このとき

  - 対 (A, B) が可制御 $\iff$ 対 $(\bar{A}, \bar{B})$ が可制御
  - 対 (A, C) が可観測 $\iff$ 対 $(\bar{A}, \bar{C})$ が可観測

<u>可制御性・可観測性は同値変換で変化しない</u>