

機械・航空宇宙工学科

**制御工学第2及び演習
(旧 制御工学第2)
第6回：双対性・同値変換**

航空宇宙工学専攻

椿野 大輔

(tsubakino [at] nuae.nagoya-u.ac.jp)

[at] → @ へ

可制御性と可観測性の双対性

□ システムと双対システム

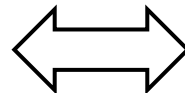
元のシステム

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

双対 (dual) システム

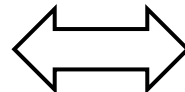
$$\Sigma' : \begin{cases} \dot{x} = A^\top x + C^\top u \\ y = B^\top x \end{cases}$$

Σ が可制御



Σ' が可観測

Σ が可観測



Σ' が可制御

可制御性と可観測性の**双対性** (duality)

- (A, B) について可制御性から導かれる結果（具体的には今後扱う）には (A, C) に対しても対応する結果が存在。

状態変数の変換の一般論

□ 状態方程式

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m$$

$$y = Cx$$

$$y(t) \in \mathbb{R}^r$$

□ 状態変数の変換

■ 新たな変数

$$\bar{x} = Tx$$

$T \in \mathbb{R}^{n \times n}$: 正則な行列

■ 逆変換

$$x = T^{-1}\bar{x}$$

■ 変換後の状態方程式と出力方程式

微分 → $\dot{\bar{x}} = T\dot{x} = TAx + TBu = TAT^{-1}\bar{x} + TBu$

↓ $y = Cx = CT^{-1}\bar{x}$

代入

同値変換での可制御性・可観測性の不変性

□ [定理]

- 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ および
行列 $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\bar{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ は, ある正則な
 $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ により互いに同値であるとする.

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB, \quad \bar{C} = CT^{-1}$$

■ このとき

■ 対 (A, B) が可制御 \iff 対 (\bar{A}, \bar{B}) が可制御

■ 対 (A, C) が可観測 \iff 対 (\bar{A}, \bar{C}) が可観測

可制御性・可観測性は同値変換で変化しない