機械・航空宇宙工学科

制御工学第2及び演習
（旧 制御工学第２）
第7回：正準形と伝達関数行列

航空宇宙工学専攻

椿野 大輔

(tsubakino [at] nuae.nagoya-u.ac.jp)

[at] → @ へ

可制御正準形（補足）

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad Tb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可制御正準形での各定数

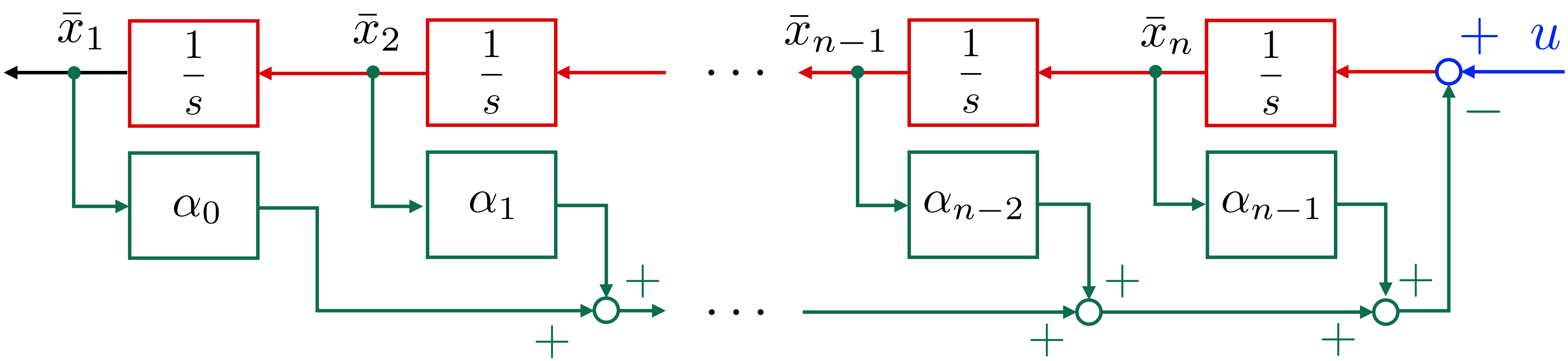
- $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$：$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の特性多項式の係数

$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

- $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{R}$：後半で

可制御正準形のブロック線図 $(\bar{x} = Tx)$

- $\dot{\bar{x}}_i = \bar{x}_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$
- $\dot{\bar{x}}_n = -\alpha_0\bar{x}_1 - \alpha_1\bar{x}_2 - \cdots - \alpha_{n-1}\bar{x}_n + u$



証明：構成的に示す（1）

変換行列の構成

- 列ベクトルの定義

↓ -1
↓ そのまま

$$t_1 = (A^{n-1} + \alpha_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \alpha_2 A^1 + \alpha_1 I_n)b \in \mathbb{R}^n$$

$$t_2 = (A^{n-2} + \alpha_{n-1}A^{n-3} + \cdots + \alpha_2 I_n)b \in \mathbb{R}^n$$

$$\vdots$$

$$t_{n-1} = (A^1 + \alpha_{n-1}I_n)b \in \mathbb{R}^n$$

$$t_n = b \in \mathbb{R}^n$$

- 各ベクトルの関係

$$\left.\begin{aligned} t_{n-1} &= Ab \boxed{+ \alpha_{n-1}b} \\ At_n &= Ab \end{aligned}\right\} At_n = t_{n-1} - \alpha_{n-1}b$$

$A\times$

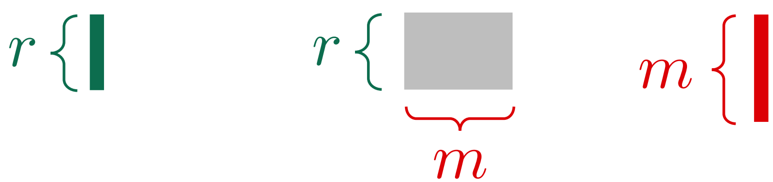
状態空間表現と伝達関数の関係（2）

状態方程式・出力方程式の Laplace 変換

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} \quad \begin{aligned} X(s) &= (sI_n - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) \end{aligned}$$

- 状態変数を消去した式

$$Y(s) = C(sI_n - A)^{-1}BU(s)$$



伝達関数行列

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$$

第(i, j) 要素は, j 番目の入力から i 番目の出力への伝達関数

1入力1出力システムに対しては通常の伝達**関数**に一致

可制御正準形と伝達関数

1入力1出力システム

- 状態空間表現

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t), y(t) \in \mathbb{R}$$

$$y = cx \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ b \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

対 (A, b) は可制御

- 伝達関数

$$G(s) = c(sI_n - A)^{-1}b = \frac{\gamma_{n-1}s^{n-1} + \gamma_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \gamma_1 s + \gamma_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

- 可制御正準形

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad Tb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

計算は補足資料を参照

$$cT^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} \end{bmatrix}$$