機械・航空宇宙工学科

制御工学第2及び演習
（旧 制御工学第２）
第12回：可制御正準分解

航空宇宙工学専攻

椿野 大輔

(tsubakino [at] nuae.nagoya-u.ac.jp)

[at] → @ へ

不変部分空間

不変部分空間の定義

- $X \subset \mathbb{R}^n$: 部分線形（ベクトル）空間
  - $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ u, v \in X \implies \alpha u + \beta v \in X$
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

[定義]

- 部分空間 X が A-不変部分空間 (invariant subspace)

$$\overset{\text{def}}{\iff} u \in X \implies Au \in X$$

  - X の任意の元に A をかけても, X の元のまま

<u>簡単な例</u>

$$\left.\begin{aligned} X &= \{u = [u_1, u_2]^\top \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 = 0\} \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3u_2 \end{bmatrix}$$

0のまま

準備：可制御部分空間の不変性（2）

□ 可制御部分空間

$$\mathrm{Im}\, M_C = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

- 可制御部分空間は A-不変部分空間

[証明]（続き）

$$v = M_C w = Bw_1 + ABw_2 + \cdots + A^{n-1}Bw_n$$

$$\Rightarrow Av = ABw_1 + A^2Bw_2 + \cdots + A^nBw_n$$

$A\times$

Cayley-Hamilton の定理

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0$$

$$= -\alpha_0 Bw_n + AB(w_1 - \alpha_1 w_n) + \cdots - \alpha_{n-1}A^{n-1}Bw_{n-1}$$

$\boxed{\therefore Av \in \mathrm{Im}\, M_C}$ $\Rightarrow$ 確かに A-不変部分空間 □

可制御正準分解（3）

変換行列

- 基底を並べて行列を構成

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{n_c} & v_{n_c+1} & \cdots & v_n \end{bmatrix}^{-1}$$

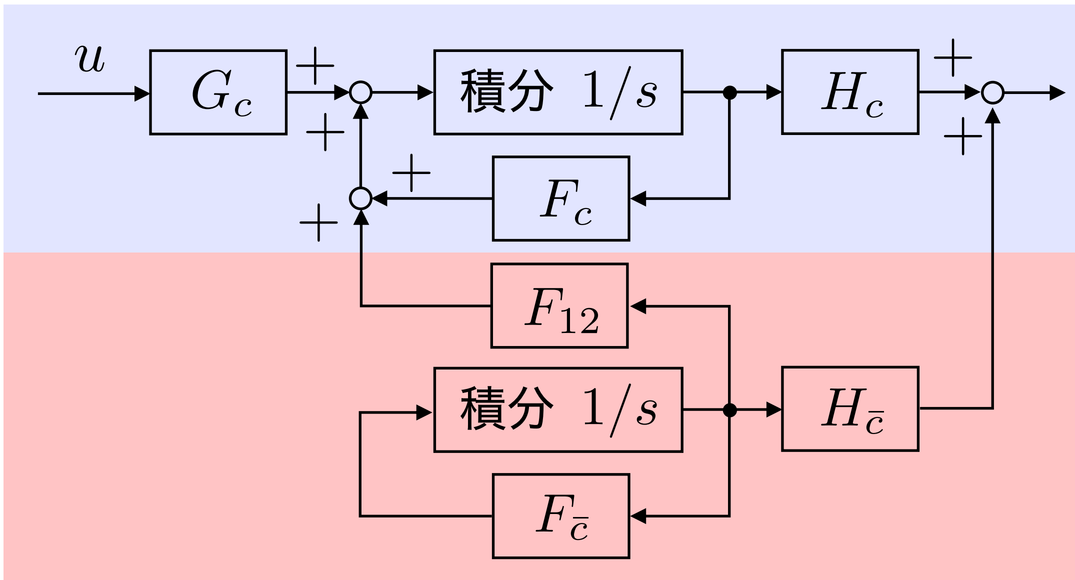
- 前ページの関係式

$$\begin{aligned}
AT^{-1} &= \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \dots & Av_{n_c} & Av_{n_c+1} & \cdots & Av_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_{n_c} & v_{n_c+1} & \cdots & v_n \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
f_{11} & \cdots & f_{n_c1} & f_{n_c+1,1} & \cdots & f_{n1} \\
f_{12} & \cdots & f_{n_c2} & f_{n_c+1,2} & \cdots & g_{n2} \\
\vdots & F_c & \vdots & \vdots & F_{12} & \vdots \\
f_{1n_c} & \cdots & f_{n_cn_c} & f_{n_c+1,n_c} & \cdots & f_{nn_c} \\
0 & \cdots & 0 & f_{n_c+1,n_c+1} & \cdots & f_{n,n_c+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & F_{\bar{c}} & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & f_{n_c+1,n} & \cdots & f_{n,n}
\end{bmatrix} \\
&= T^{-1} \begin{bmatrix} F_c & F_{12} \\ 0 & F_{\bar{c}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$F_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}, \quad F_{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{(n-n_c)\times(n-n_c)}, \quad F_{12} \in \mathbb{R}^{n_c \times (n-n_c)}$$

正準分解から分かること（1）

不可制御なシステムの構造



伝達関数には
この部分しか
現れない

入力が直接的にも
間接的にも影響を
与えることができ
ないサブシステム

伝達関数

$$G(s) = \begin{bmatrix} H_c & H_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_{n_c} - F_c & -F_{12} \\ 0 & sI_{n-n_c} - F_{\bar{c}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= H_c(sI_{n_c} - F_c)^{-1}G_c$$

$$\begin{bmatrix} L & M \\ 0 & N \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} L^{-1} & -L^{-1}MN^{-1} \\ 0 & N^{-1} \end{bmatrix}$$