新規配属４年生向け
最適制御速習セミナー

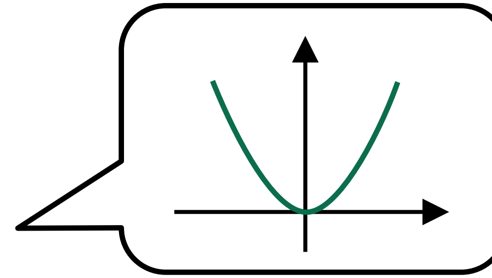
最適制御に関する基本事項
Hamilton-Jabobi-Bellman 方程式と Riccati 方程式

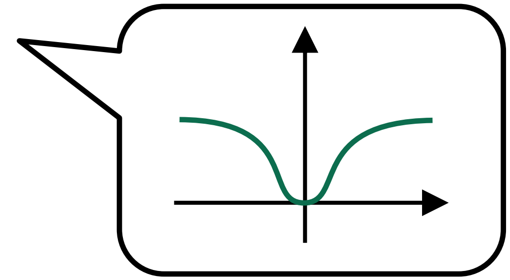
名古屋大学 大学院工学研究科
椿野 大輔
tsubakino [at] nuae.nagoya-u.ac.jp
[at] → ＠

評価関数の導入

入力決定の指針

- 状態変数への要求の例
  - 値が大きい間は速く収束させたい
  - なるべく一様に 0 に収束させたい
- 入力への要求の例
  - 値を大きくしたくない





評価関数

$$J(x_0, u) = \int_0^T \Big(q(x(t)) + r(u(t)) \Big) dt$$

小さい
= 良い

$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} :$ 状態変数への要求を定量化

$r : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} :$ 入力への要求を定量化

$q(x) \geq 0$

$r(0) = 0$

$r(u) > 0$ if $u \neq 0$

最適制御問題の解

準備

- Hamilton 関数

$$H(x,p,u) = \underbrace{q(x)+r(u)}_{\text{評価関数の被積分項}} + p^\top \underbrace{\left(f(x)+g(x)u\right)}_{\text{状態方程式の右辺}}$$

- Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程式

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min_u H\left(x, \frac{\partial V}{\partial x}, u\right), \quad V(x,T)=0$$

最適制御入力

- HJB 方程式に C^1 級の解が存在するとき，最適入力は以下で与えられる.

$$\boxed{u^* = \arg\min_u H\left(x, \frac{\partial V}{\partial x}, u\right)}$$

線形システムで評価関数が２次の場合（続き）

線形２次 (LQ, Linear Quadratic) 最適制御

- 行列 Riccati 微分方程式

$$-\dot{P} = PA + A^\top P - PBR^{-1}B^\top P + Q, \quad P(T) = 0$$

- 最適入力

$$\boxed{u^*(t) = -R^{-1}B^\top P(t)x(t)}$$

無限時間問題（最適レギュレータ）

- $T \to \infty$ のとき，ある条件下で $P(0)$ は準正定行列 P_∞ に収束する．$P(t) = P_\infty, \dot{P} = 0$ とすれば

$$P_\infty A + A^\top P_\infty - P_\infty BR^{-1}B^\top P_\infty + Q = 0$$

⇨ 行列代数 Riccati 方程式

$$u^* = -R^{-1}B^\top P_\infty x$$

⇨ 最適レギュレータ (LQR)