制御工学第２及び演習 (B) 第７回 講義補足資料

2020 年 6 月 10 日

この資料では，可制御正準形

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n},$$

から伝達関数 $G(s) = \bar{c}(sI_n - \bar{A})^{-1}\bar{b}$ を計算する．

まず，$(sI_n - \bar{A})^{-1}$ を求める．行列 $sI_n - \bar{A}$ の行列式 $d(s) = \det(sI_n - \bar{A})$ の計算から始める．行列式の定義（もしくは余因子展開）より

$$d(s) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s & -1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} & s+\alpha_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= s\underbrace{\begin{vmatrix} s & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s & -1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} & s+\alpha_{n-1} \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} + \alpha_0(-1)^{n+1}\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & & & \\ s & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s & -1 \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)}$$

を得る．ここで，

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & & & \\ s & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s & -1 \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} = (-1)^{n-1}$$

であるので

$$d(s) = s\underbrace{\begin{vmatrix} s & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s & -1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} & s+\alpha_{n-1} \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} + \alpha_0(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = s\underbrace{\begin{vmatrix} s & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s & -1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} & s+\alpha_{n-1} \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} + \alpha_0$$

となる．

また，第 1 項については，余因子展開より

$$
\underbrace{\begin{vmatrix} s & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s & -1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} & s+\alpha_{n-1} \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} = s \underbrace{\begin{vmatrix} s & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s & -1 \\ \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-2} & s+\alpha_{n-1} \end{vmatrix}}_{(n-2)\times(n-2)} + (-1)^n\alpha_1 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & & & \\ s & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s & -1 \end{vmatrix}}_{(n-2)\times(n-2)}
$$

$$
= s \underbrace{\begin{vmatrix} s & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s & -1 \\ \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-2} & s+\alpha_{n-1} \end{vmatrix}}_{(n-2)\times(n-2)} + \alpha_1
$$

を得る．このように形を保ったまま，考えるべき行列式の次数と α の添字が減ってゆく．繰り返すと以下まで減ることになる．

$$
\begin{vmatrix} s & -1 \\ \alpha_{n-2} & s+\alpha_{n-1} \end{vmatrix} = s^2 + \alpha_{n-1}s + \alpha_{n-2}
$$

よって，全てをまとめれば以下を得る．

$$
\begin{aligned}
d(s) &= s\bigl(s(s(\cdots(s(s^2+\alpha_{n-1}s+\alpha_{n-2})+\alpha_{n-3})\cdots)+\alpha_2)+\alpha_1\bigr)+\alpha_0 \\
&= \boxed{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}
\end{aligned}
$$

行列 $(sI_n - \bar{A})$ の行列式が計算できたため，あとは各成分に対する余因子を計算すれば $(sI_n - \bar{A})^{-1}$ を求めることができる．ただし，最終的には $\bar{b}$ をかけて $(sI_n - \bar{A})^{-1}\bar{b}$ とすることを考えれば，$\bar{b}$ の第 n 成分以外は 0 であるため，$(sI_n - \bar{A})^{-1}$ の第 n 列を計算するたけで十分である．

行列 $sI_n - \bar{A}$ の逆行列の第 $(1, n)$ 要素は $sI_n - \bar{A}$ の第 n 行と第 1 列を除いた行列の行列式

$$
\begin{vmatrix} -1 & & & \\ s & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}
$$

に $(-1)^{n+1}/d(s)$ をかけたもの，つまり $(-1)^{2n}/d(s) = 1/d(s)$ である．つぎに，行列 $sI_n - \bar{A}$ の逆行列の第 $(2, n)$ 要素は $sI_n - \bar{A}$ の第 n 行と第 2 列を除いた行列の行列式

$$
\begin{vmatrix} s & & & & \\ & -1 & & & \\ & s & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & s & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-2}s
$$

に $(-1)^{n+2}/d(s)$ をかけたもの，つまり $(-1)^{2n}s/d(s) = s/d(s)$ である．同様に，行列 $sI_n - \bar{A}$ の逆行列の第 $(3, n)$ 要素は $sI_n - \bar{A}$ の第 n 行と第 3 列を除いた行列の行列式

$$
\begin{vmatrix} s & -1 & & & & \\ & s & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & s & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & s & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-3}s^2
$$

に $(-1)^{n+3}/d(s)$ をかけたもの，つまり $(-1)^{2n}s^2/d(s) = s^2/d(s)$ である．これを繰り返すことで，

$$(sI_n - \bar{A})^{-1} = \frac{1}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} \begin{bmatrix} * & \cdots & * & 1 \\ * & \cdots & * & s \\ * & \cdots & * & s^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & s^{n-1} \end{bmatrix}$$

を得る．なお，$*$ にはそれぞれ異なる適当な値が入るが，すでに述べた通り求める必要はない．これより，

$$\begin{aligned}(sI_n - \bar{A})^{-1}\bar{b} &= \frac{1}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} \begin{bmatrix} * & \cdots & * & 1 \\ * & \cdots & * & s \\ * & \cdots & * & s^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & s^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

が導かれる．最後に $\bar{c}$ をかければ，伝達関数が次式のように計算できる．

$$\begin{aligned}\bar{c}(sI_n - \bar{A})^{-1}\bar{b} &= \frac{1}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \boxed{\frac{\gamma_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}}\end{aligned}$$