制御工学第２及び演習 (B) 第12回 講義補足資料

椿野 大輔

システム

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx\end{aligned}$$

を考える．ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^r$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$ である．このシステムについて

$$\operatorname{rank} M_C = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n_c < n$$

であるとする．このとき，スライドに示した議論から

$$F := TAT^{-1} = \begin{bmatrix} F_c & F_{12} \\ 0 & F_{\bar{c}} \end{bmatrix}, \quad G := TB = \begin{bmatrix} G_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

と同値変換できる．ただし，$F_c \in \mathbb{R}^{n_c\times n_c}$, $G_c \in \mathbb{R}^{n_c\times m}$ である．

第６回の講義資料でみた通り，変換後の可制御性行列

$$\bar{M}_C = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$$

と，もとの可制御性行列 M_C のランクの間には

$$\operatorname{rank} \bar{M}_C = \operatorname{rank} M_C$$

が成り立つため，

$$\operatorname{rank} \bar{M}_C = n_c$$

である．具体的に $\bar{M}_C$ を計算すると

$$\bar{M}_C = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_c & F_cG_c & F_c^2G_c & \cdots & F_c^{n-1}G_c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

となる．また，F_c は $n_c \times n_c$ 行列であるので，Cayley-Hamilton の定理より，$k \geq n_c$ となる任意の整数 k に対して，F_c^k は $I_{n_c}, F_c, F_c^2, \ldots, F_c^{n_c-1}$ の線形和として表すことができる．よって，$\bar{M}_C$ の $F^{n_c}G_c$ より右（$F^{n_c}G_c$ も含む）の列ベクトルは，それ以前の列ベクトルの線形和で表せる．すなわち

$$\begin{aligned}\operatorname{rank} \bar{M}_C &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} G_c & F_cG_c & \cdots & F_c^{n_c-1}G_c & F_c^{n_c}G_c & \cdots & F_c^{n-1}G_c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\\ &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} G_c & F_cG_c & \cdots & F_c^{n_c-1}G_c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\\ &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} G_c & F_cG_c & \cdots & F_c^{n_c-1}G_c \end{bmatrix}\end{aligned}$$

を得る．以上より，

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} G_c & F_cG_c & \cdots & F_c^{n_c-1}G_c \end{bmatrix} = n_c$$

が成り立つため，対 (F_c, G_c) は可制御である．